



AGA0293 Astrofísica Estelar

Profa. Jane Gregorio-Hetem

Capítulo 8

Classificação dos Espectros Estelares

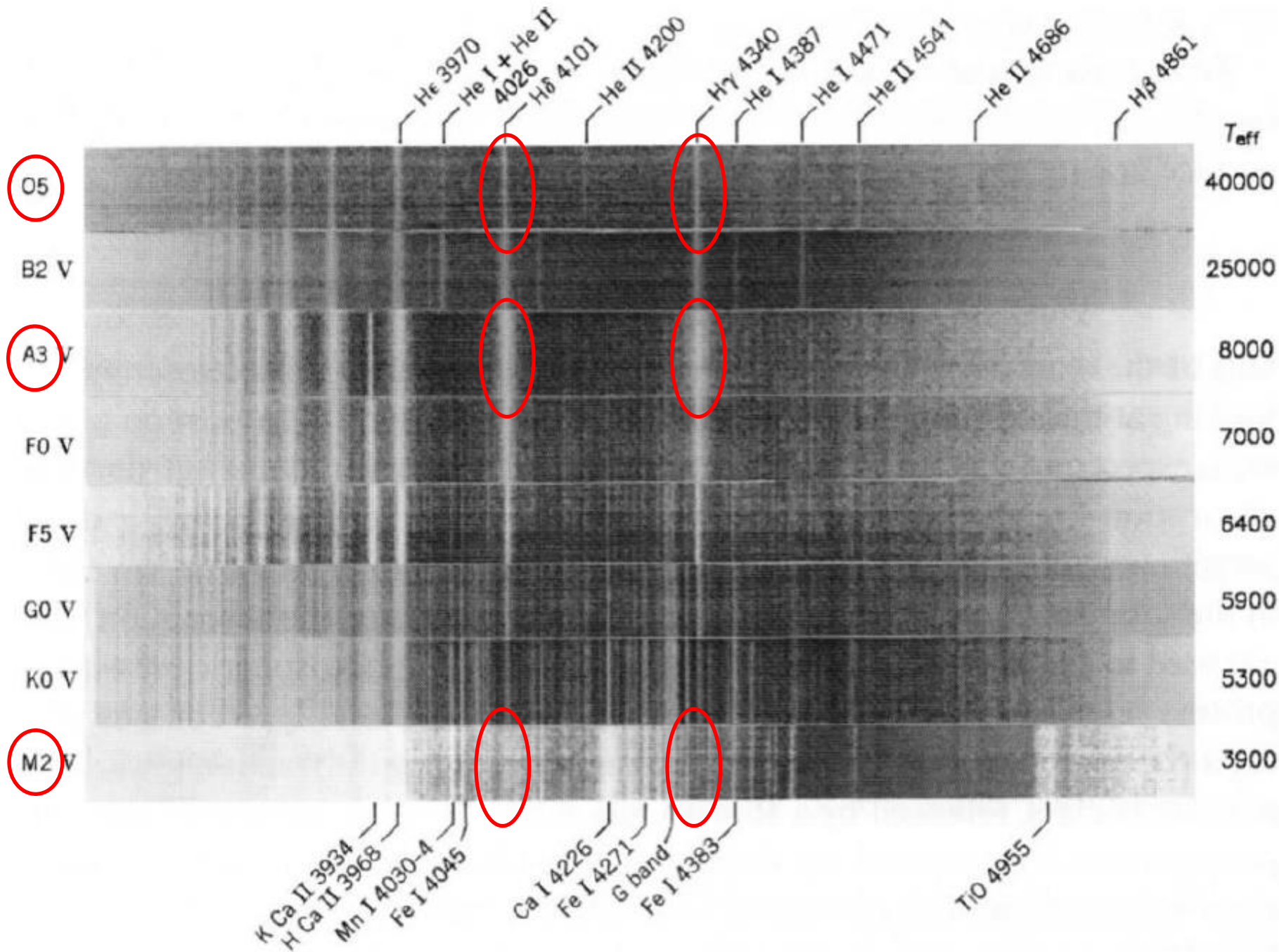
8.1 Formação das linhas espectrais

8.2 O Diagrama H-R

CLASSIFICAÇÃO ESPECTRAL

- Elementos químicos \Rightarrow responsáveis pelas linhas espectrais \Rightarrow formadas sob variadas condições físicas.
- Taxonomia espectral desenvolvida nos anos 1890 no Observatório de Harvard, por E. Pickering e colaboradoras.
- Nomenclatura adotada com base na intensidade das linhas de hidrogênio: estrelas tipo “A” têm linhas mais fortes, nas “B” intensidade menor, diminuindo até o último tipo.





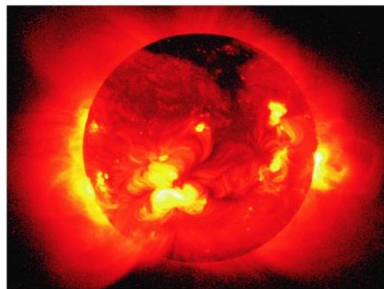
Tipos espectrais

- Em 1901, Annie J. Cannon (Harvard) reorganizou a sequência de tipos.
- melhor entendimento dos sub-níveis da estrutura atômica \Rightarrow distribuição em função da temperatura superficial da estrela (T_{ef}).



O, B, A, F, G, K, M

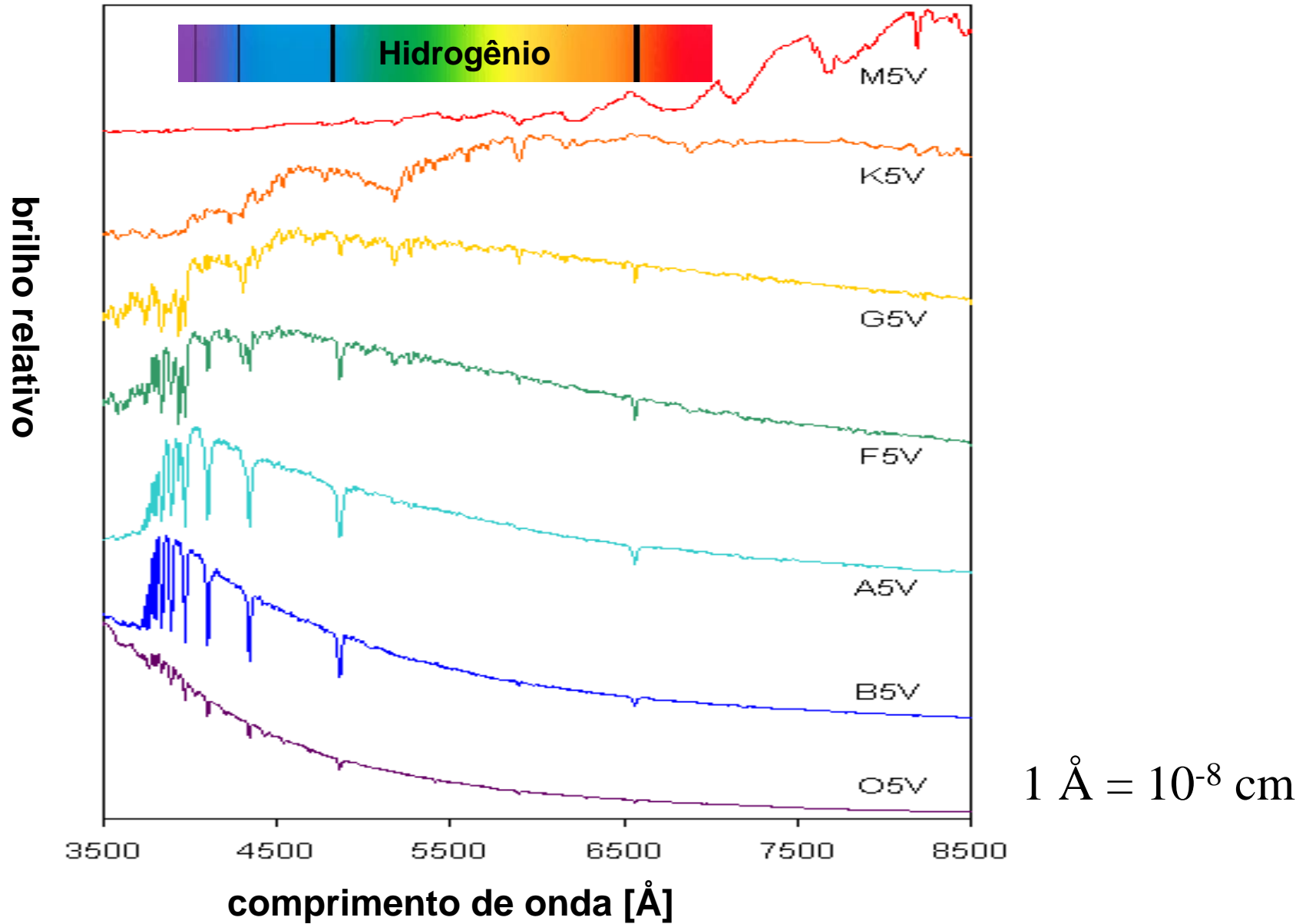
primeiros tipos
(*early type*)
★ quentes



últimos tipos
(*late type*)
★ frias

O Sol é uma estrela de
tipo G2

Espectros de estrelas de diferentes temperaturas, mesma composição química.



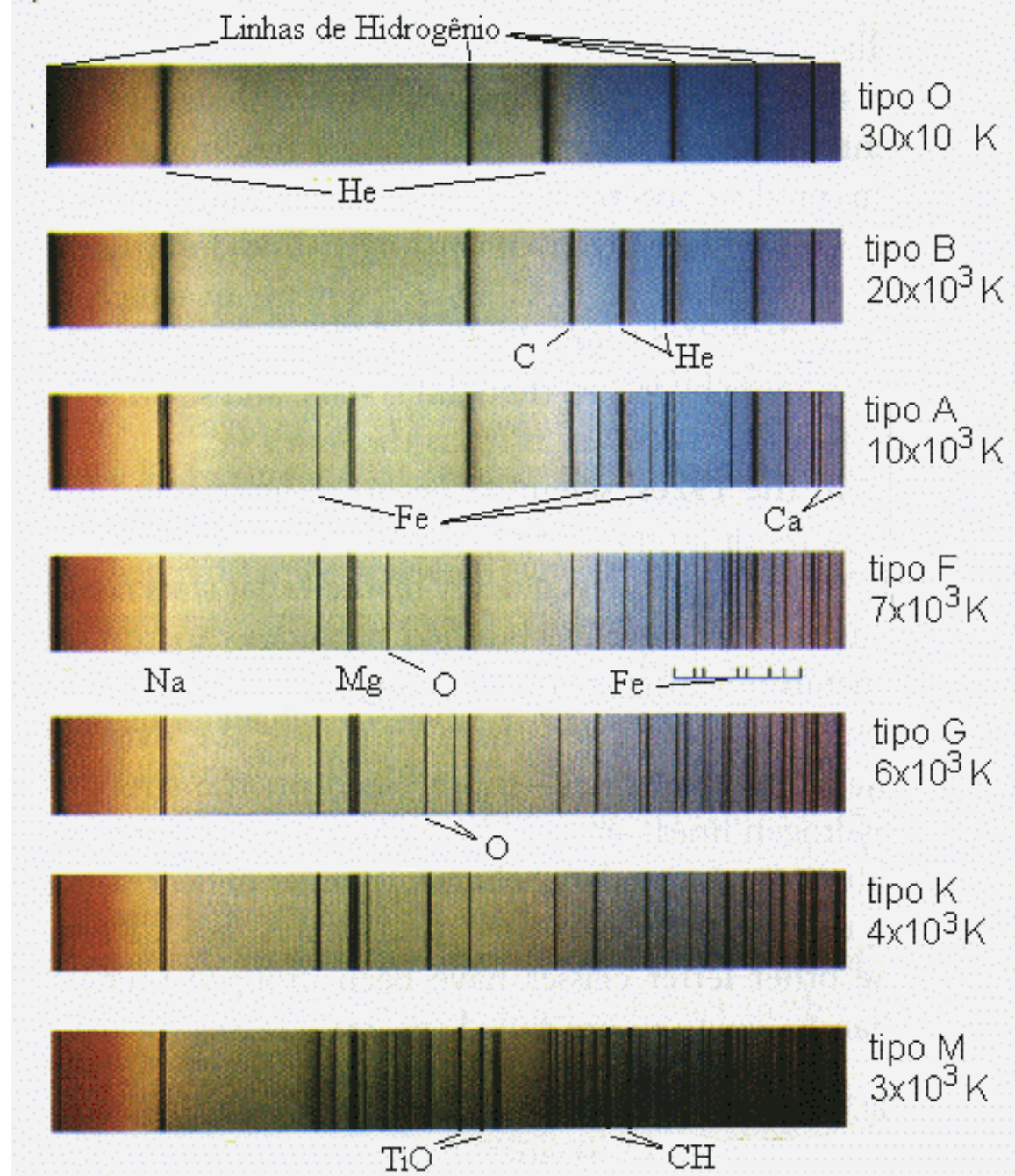
Linhas Espectrais (cont.)

- Ex: espectros ópticos (400 a 700nm) de sete estrelas – todas **semelhantes** ao Sol (em termos de **composição química**).

Todos os 7 espectros apresentam linhas de absorção sobrepostas ao contínuo.

Padrão difere de um para o outro.

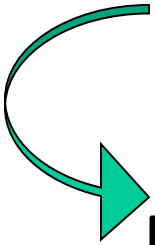
Em alguns espectros as linhas aparecem mais fortes que em outros.



$$T > 25.000K$$

- Forte linha do hélio ionizado (He II) e de oxigênio, nitrogênio e silício (múltiplas ionizações).

Não aparecem nos espectros das estrelas mais frias
($\downarrow T_{\text{interna}} \Rightarrow$ não podem excitar e ionizar esses elementos),



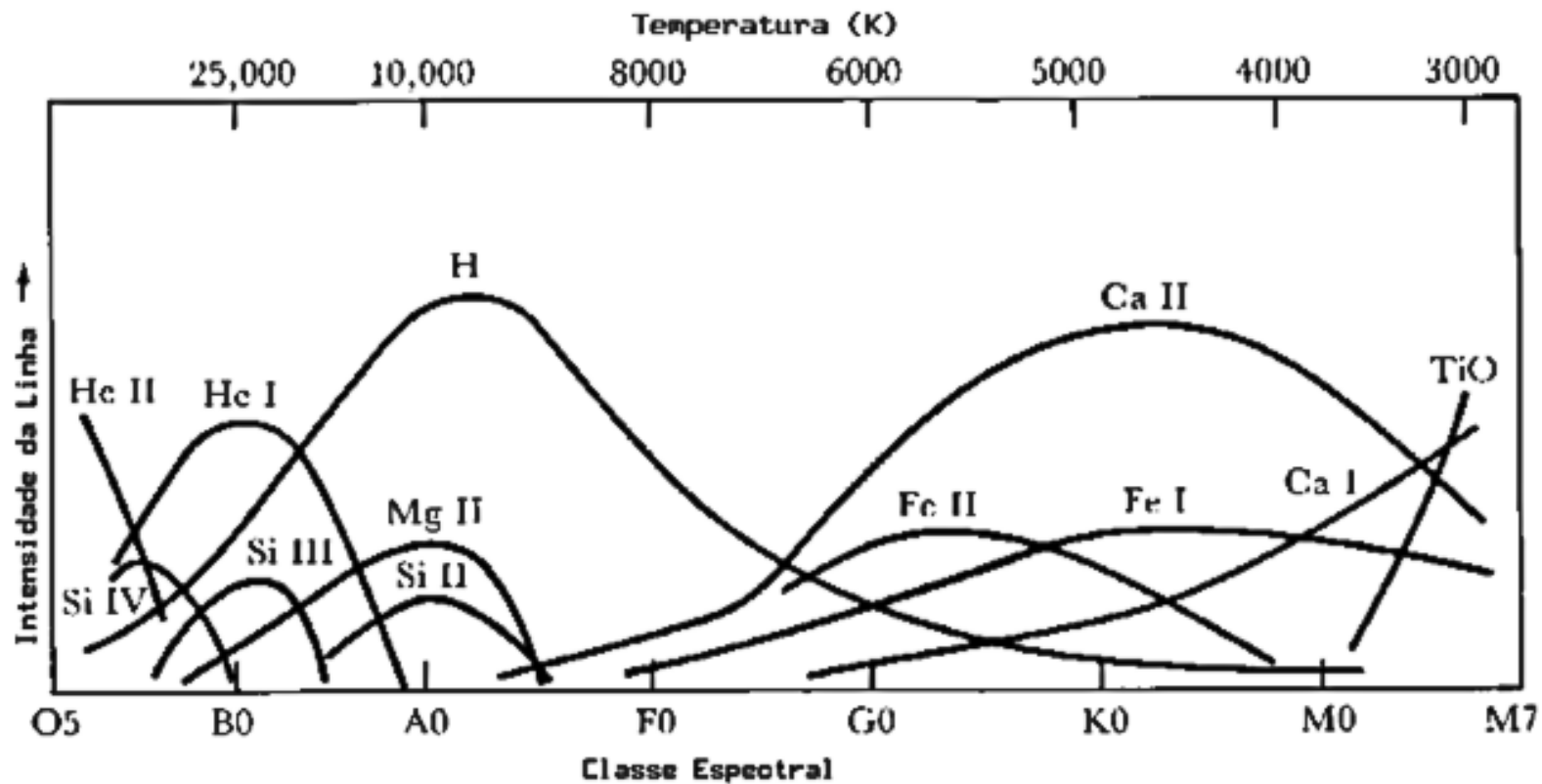
Mas as linhas de absorção do H são mais fracas nas estrelas quentes, pois poucos átomos permanecem intactos para produzir tais linhas.

$$T \sim 10.000 \text{ K}$$

- As linhas mais fortes são as do hidrogênio (os elétrons movem-se mais facilmente entre os orbitais produzindo $H\alpha$).
- Ca, Ti (elétrons menos ligados) são mais comuns do que as linhas de He, O e N (elétrons são fortemente ligados).

$$T \sim 3.000 \text{ K}$$

- Novamente **não encontramos as linhas de hidrogênio** \Rightarrow a transição entre os níveis orbitais não ocorre \Rightarrow **elétrons ficam preferencialmente no estado fundamental.**
- Linhas de elementos mais pesados \Rightarrow fracamente excitados \Rightarrow **não se encontram linhas de elementos ionizados.**
- **Energia dos fótons não é suficiente para destruir moléculas** \Rightarrow presença de muitas linhas moleculares de absorção, como óxido de titânio, por ex.

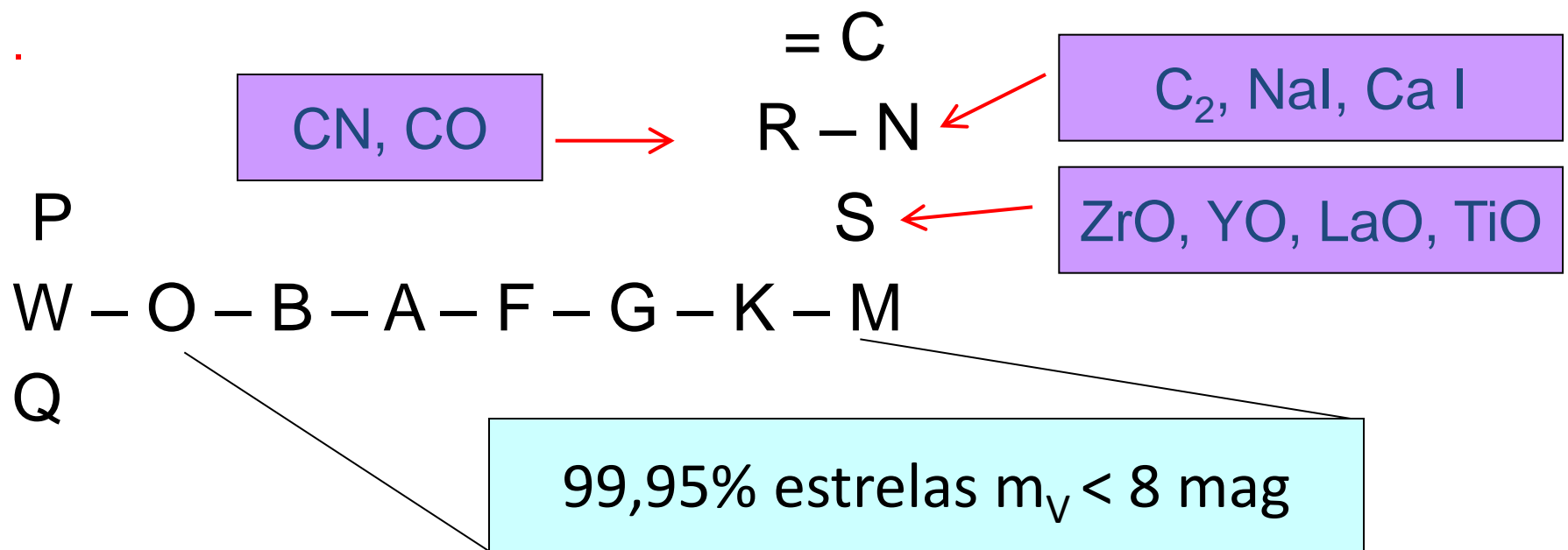


.
 P
 W - O - B - A - F - G - K - M
 Q

= C
 R - N
 S

} estrelas carbonadas
 séries secundárias

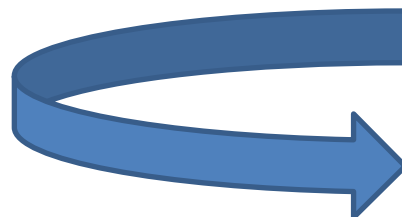
séries principais
 - L - T (anãs marrons)



T.E.	Ex.	Características espectrais
P	NGC7027	Neb. Planetária: linhas de emissão de excitação muito alta; linhas proibidas
Q	GK Per 1901	Nova
W	γ Vel (WC7+O7)	Wolf-Rayet: linhas de emissão alargadas e intensas (H, He I, He II) sobrepostas ao contínuo intenso no azul e UV.

Fundamento físico da classificação espectral

- Em quais orbitais os elétrons são mais provavelmente encontrados?
- Quais são os números relativos de átomos em vários estágios de ionização?



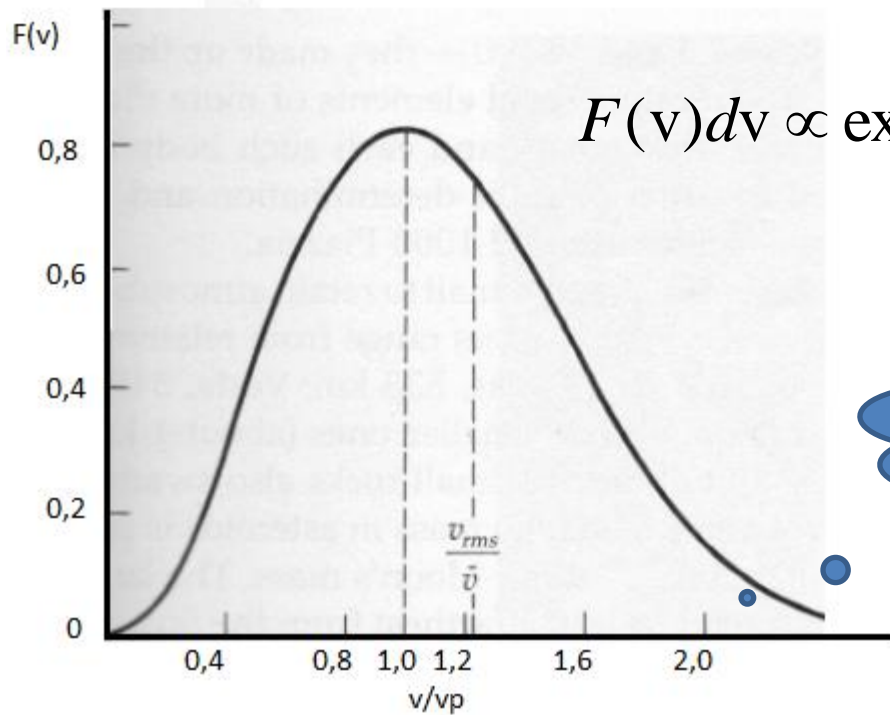
Mecânica
estatística

Distribuição Maxwell-Boltzmann

Comportamento individual?

- Um gás pode conter grande número de partículas em várias faixas de velocidades e energias, mas **como um todo**, tem propriedades bem definidas $\rightarrow P=nkT$
- No equilíbrio térmico \rightarrow função de distribuição Maxwell-Boltzman \rightarrow fração de partículas (v) que permanecem estáveis.
- O número de partículas por unidade de volume, com velocidade entre $v + dv$ é:

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{-1/2 m v^2}{kT} \right] 4\pi v^2 dv$$



$$F(v)dv \propto \exp\left[\frac{-mv^2}{2kT}\right]v^2 dv$$

A asa das altas velocidades
leva a uma v_{rms} maior

velocidades das partículas se distribuem em torno da **velocidade mais provável** (v_p), que marca o pico da distribuição → energia cinética = energia térmica

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

Velocidade média x Temperatura

A energia cinética média das partículas (átomos e moléculas) é dada por:

$$\overline{E}_c = \left(\frac{m}{2} \right) \overline{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

A velocidade média: $v_{rms} = \sqrt{(\overline{v})^2}$

será: $v_{rms} = \overline{v} = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$

Nas colisões, átomos do gás perdem e ganham energia de acordo com a distribuição de velocidades → **define a distribuição dos elétrons entre os orbitais** → baixa probabilidade de elétrons se encontrarem nos orbitais mais elevados.

Exemplo 8.1.1 A área sob a curva entre duas velocidades é igual à fração de partículas de gás naquela faixa de velocidades. Para determinar a fração de átomos de hidrogênio, em um gás a 10000K com velocidades entre $v_1=2 \times 10^4$ m/s e $v_2=2,5 \times 10^4$ m/s é necessário integrar a Função de Maxwell-Boltzmann entre esses dois limites.

$$\begin{aligned} N/N_{\text{total}} &= \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v dv \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Although Eq. (8.4) has a closed-form solution when $v_1 = 0$ and $v_2 \rightarrow \infty$, it must be evaluated numerically in other cases. This can be accomplished crudely by evaluating the integrand using an average value of the velocity over the interval, multiplied by the width of the interval, or

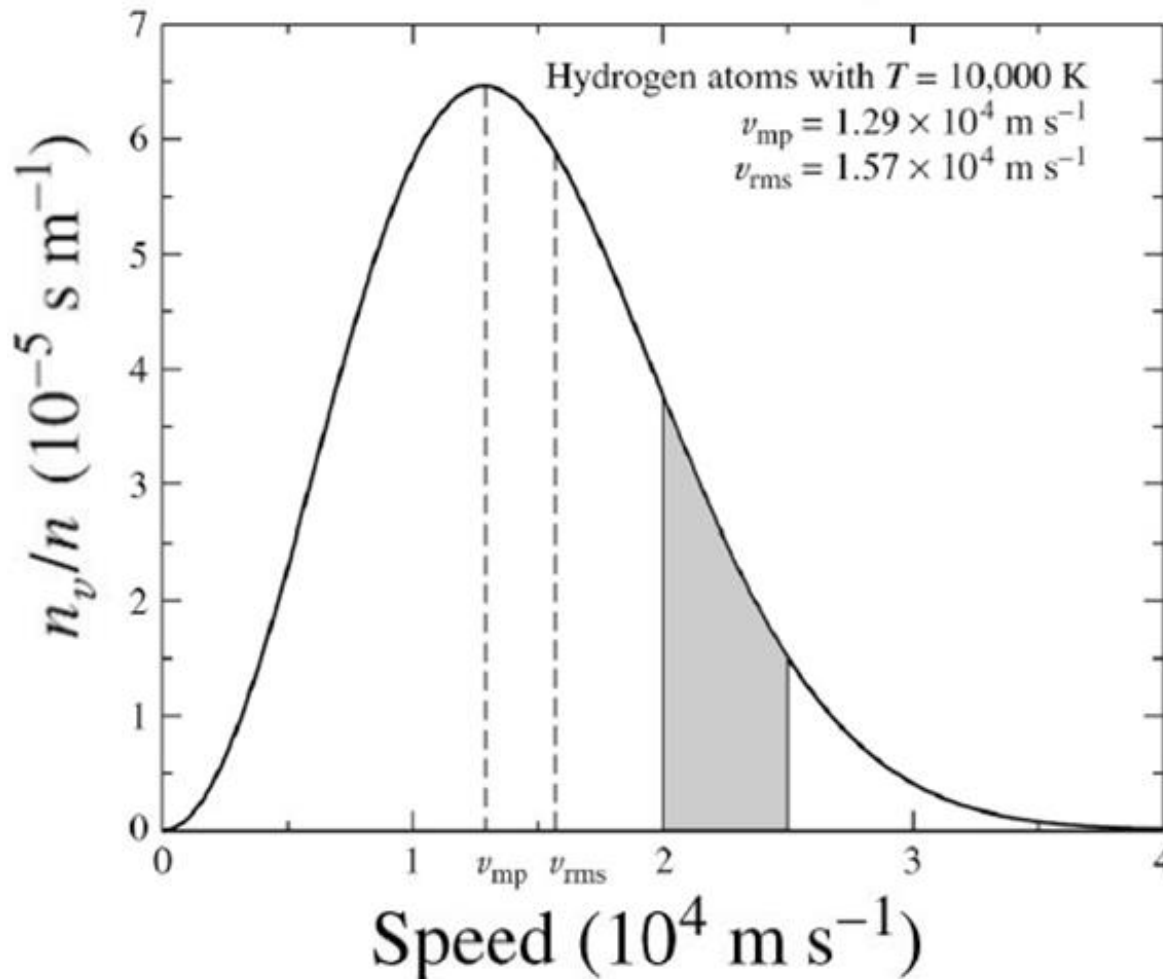
$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1),$$

where $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$. Substituting, we find

$$N/N_{\text{total}} \simeq \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi \bar{v}^2 (v_2 - v_1)$$

Exemplo 8.1.1 (cont.)

Aproximação:
$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1) \simeq 0.125.$$



Aproximadamente
12,5% dos átomos
de hidrogênio a
10000 K têm
velocidades entre
 $2 \times 10^4 - 2,5 \times 10^4 \text{ m/s}$

A integração
numérica resulta
em 12,75%

Distribuição (estatística) de elétrons

❖ s_a : conjunto de números quânticos que especificam o nível de energia E_a ;

Por exemplo: $E_a = -13,6\text{eV} \rightarrow s_a = \{n=1; l=0; m_l=0; m_s=+1/2\}$
A probabilidade de que o elétron esteja no estado s_a é $P(s_a)$.

❖ $s_b \rightarrow E_b; P(s_b)$.

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Distribuição de elétrons (cont.)

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{e^{-E_b/kT}}{e^{-E_a/kT}} = e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

❖ **Estado degenerado:** se $E_a = E_b$, mas $s_a \neq s_b$

n	l	m _l	m _s	E(eV)
1	0	0	+1/2	-13,6
1	0	0	-1/2	-13,6
2	0	0	+1/2	-3,4
2	0	0	-1/2	-3,4
2	1	1	+1/2	-3,4
.				
.				
.				
.				
2				-3.4

} g₁=2

Para H:
peso
estatístico

$$g=2n^2$$

} g₂=8

Equação de Boltzmann

Na atmosfera estelar, a razão de probabilidades
exprime a razão do número de átomos em
diferentes estados de excitação

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}$$

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}$$

Exemplo 8.1.3 Para um gás de átomos neutros de hidrogênio, em qual temperatura haverá uma **igualdade** entre o **número de átomos** com elétrons no estado **fundamental** ($n=1$) e os átomos com elétrons no primeiro estado **excitado** ($n=2$)?

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Condição do problema: $N_b = N_a$

Para hidrogênio, $g = 2n^2$

$$1 = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

$$E_n = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}$$

$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6 \text{ eV}/2^2) - (-13.6 \text{ eV}/1^2)]/kT}$$

$$k = 8.6173423 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

Ex. 8.1.3 (cont.)

$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6 \text{ eV}/2^2) - (-13.6 \text{ eV}/1^2)]/kT}$$


$$\frac{1}{4} = e^{-[(-3,4) - (-13,6)]/kT} \rightarrow 4^{-1} = e^{-[10,2]/kT}$$

$$\frac{10.2 \text{ eV}}{kT} = \ln(4)$$

$$T = \frac{10.2 \text{ eV}}{k \ln(4)} = 8.54 \times 10^4 \text{ K}$$

Altas temperaturas são necessárias para que um grande número de átomos de hidrogênio tenham elétrons no primeiro estado excitado.

Ocupação relativa entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado


$$\frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

Ocupação relativa entre o fundamental e o primeiro estado excitado em função da temperatura

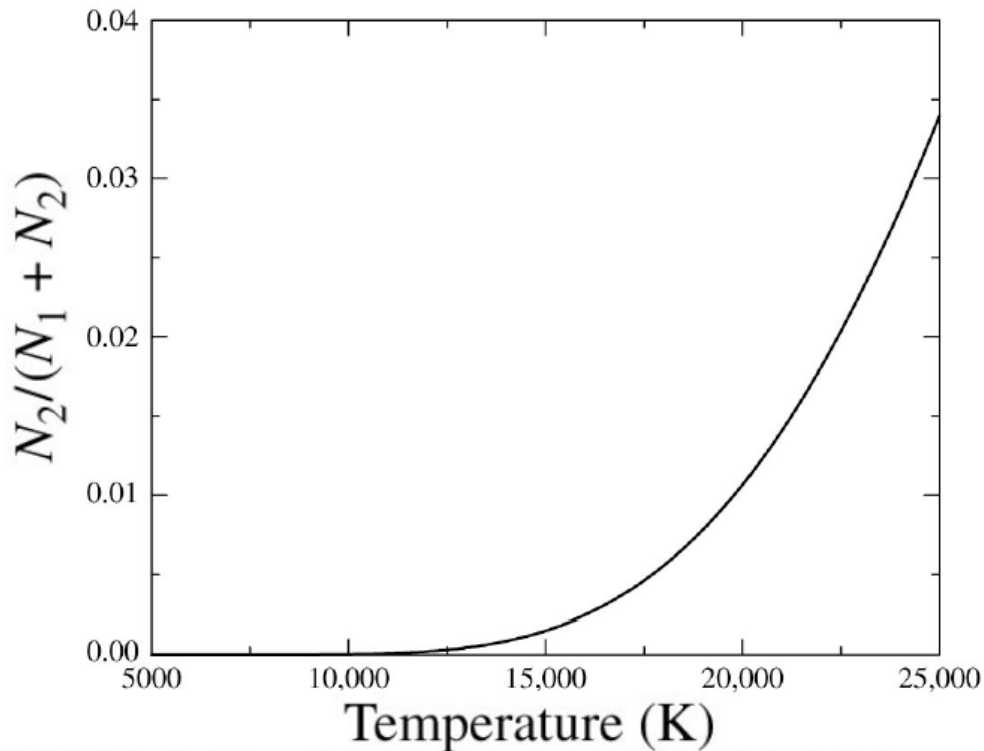
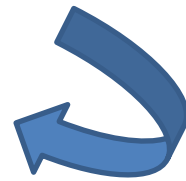


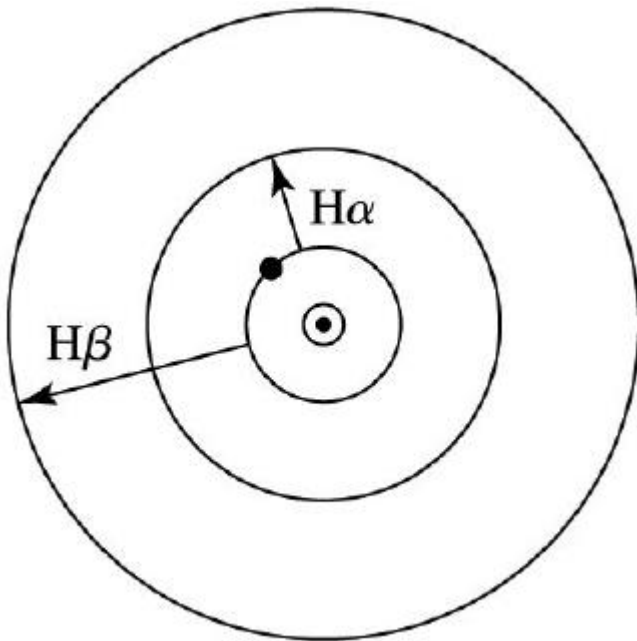
FIGURE 8.7 $N_2/(N_1 + N_2)$ for the hydrogen atom obtained via the Boltzmann equation

Para temperaturas elevadas, esperam-se mais átomos com elétrons no primeiro estado excitado do que no fundamental.

Como as linhas da série de Balmer ($n=2$) são mais intensas em estrelas A0 ($T \sim 10000\text{k}$)?



$\ll 85000\text{K}$



Para temperaturas **ainda maiores**, esperam-se **muito mais átomos** com elétrons no primeiro estado excitado do que no fundamental.

Porque a intensidade das linhas de Balmer diminui para estrelas mais quentes?

Diferentes estágios de Ionização também devem ser considerados.

- Seja χ_i a energia de ionização necessária para remover um elétron do estado fundamental, levando do estágio i para $i+1$

Por exemplo: de HI para HII $\chi_i = 13,6$ eV,
mas os átomos inicial e final podem não estar no estado fundamental.

Função de partição (Z): valor médio para a distribuição dos elétrons entre os orbitais:

$$Z = g_1 + \sum_{j=2}^{\infty} g_j e^{-\frac{(E_j - E_1)}{kT}}$$

onde E_j é a energia no nível j e g_j é a degenerescência naquele nível

Equação de Saha

- Usando as **funções de partição** para os estágios de ionização inicial (Z_i) e final (Z_{i+1}), a razão do **número de átomos** no estágio (i+1) para o No. de átomos no estágio (i) será:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2}{n_e} \left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

onde m_e é a massa do elétron

n_e é a densidade de elétrons livres

Quanto maior n_e , menor N_{i+1}

O fator 2 representa os dois spins do elétron ($m_s = \pm 1/2$)

- Usando a pressão de elétrons: $P_e = n_e kT$

A eq. de Saha fica:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$



Meghnad Saha
1893-1956

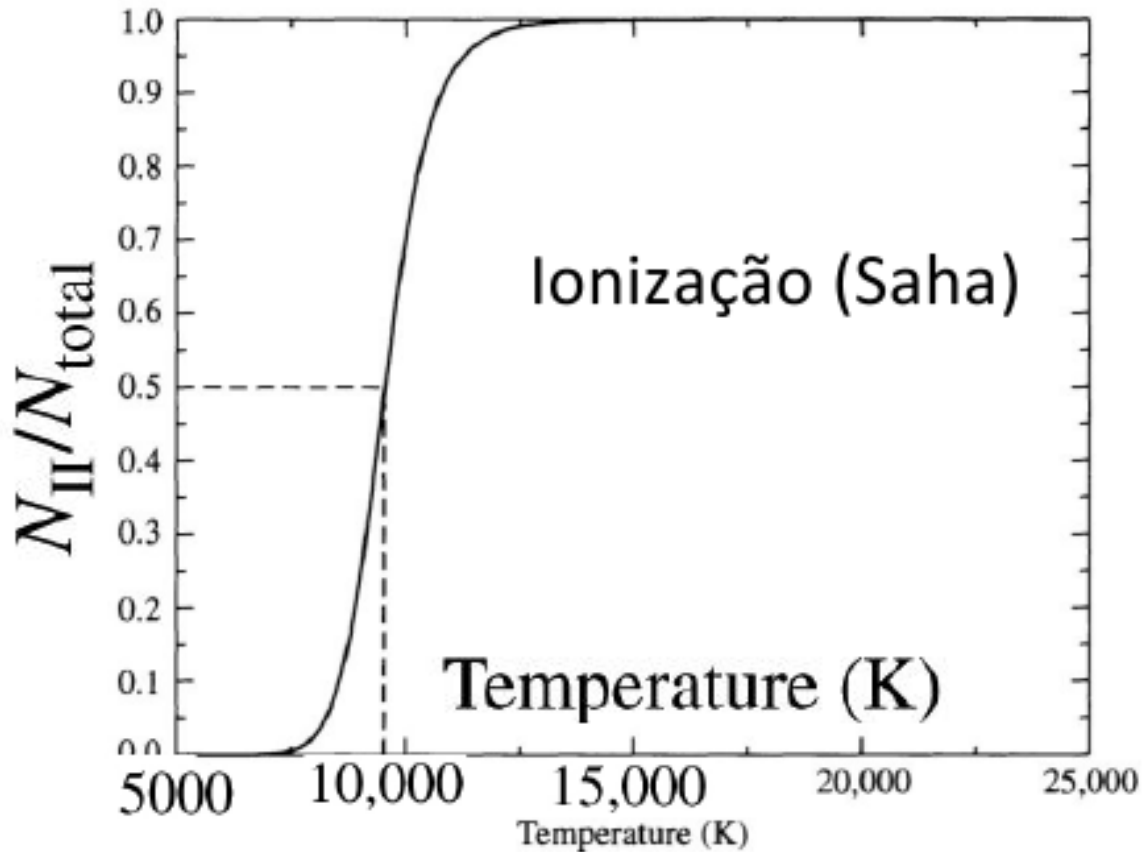
Ionização: Notação

- Hidrogênio neutro: H , H^0 ou $H\text{ I}$
- Hidrogênio ionizado: H^+ ou $H\text{ II}$
- Ferro neutro: Fe , Fe^0 ou $Fe\text{ I}$
- Ferro ionizado: Fe^+ ou $Fe\text{ II}$
- Ferro três vezes ionizado: Fe^{3+} , $Fe\text{ IV}$

Populações:

- N_n : elétron no nível de excitação n
- N_I : neutro; N_{II} : ionizado, N_{III} : 2 vezes ionizado
- N_n^{III} : nível de excitação n , 2 vezes ionizado

Fig. 8.6 $N_{\text{II}}/N_{\text{total}}$ para o hidrogênio a partir da equação de Saha



T=5000 K nenhum
átomo de H ionizado

T~8300 K 5% ionizado

T~9600 K 50%

T~11300 K 95% está na
forma de HII

No interior estelar há uma estreita região onde o H está parcialmente ionizado → T ~10000K → **zona de ionização parcial**

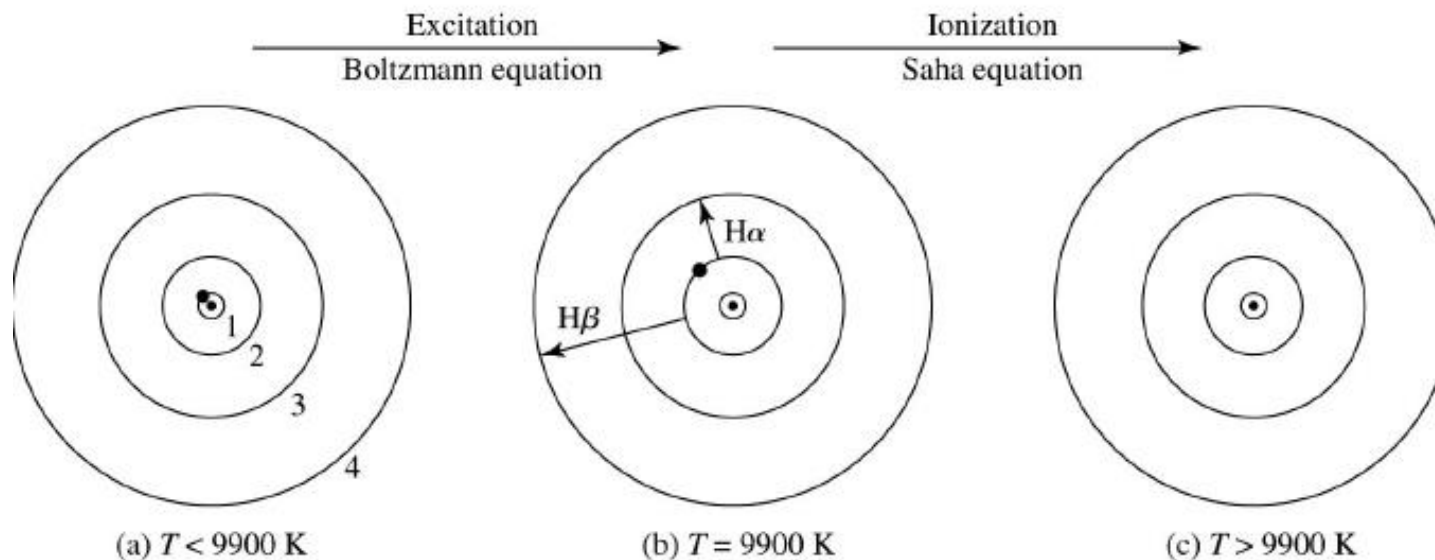
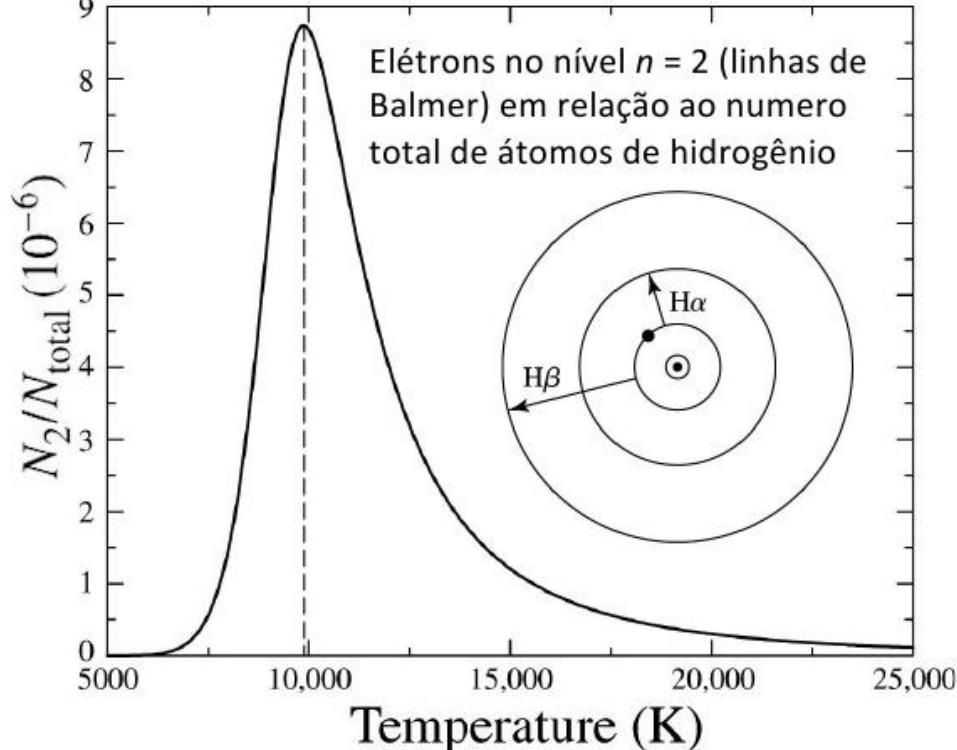


FIGURE 8.10 The electron's position in the hydrogen atom at different temperatures. In (a), the electron is in the ground state. Balmer absorption lines are produced only when the electron is initially in the first excited state, as shown in (b). In (c), the atom has been ionized.

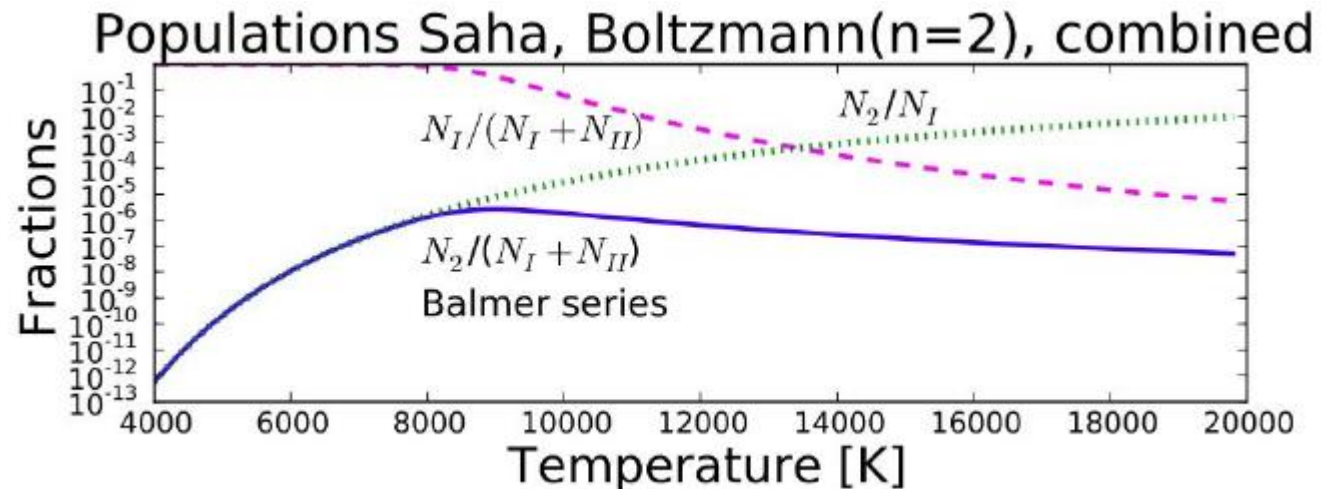


Combinando Equações de Boltzmann e de Saha

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{N_I}{N_{\text{total}}} \right)$$

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \right) \left(\frac{1}{1 + N_{II}/N_I} \right)$$

FIGURE 8.9 N_2/N_{total} for hydrogen from the Boltzmann and Saha equations, assuming $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$. The peak occurs at approximately 9900 K.



Exemplo 8.1.5 Estimar a intensidade (força) relativa das linhas de Balmer e as linhas H e K do cálcio na fotosfera solar.

Example 8.1.5. The Sun's "surface" is a thin layer of the solar atmosphere called the *photosphere*; see Section 11.2. The characteristic temperature of the photosphere is $T = T_e = 5777$ K, and it has about 500,000 hydrogen atoms for each calcium atom with an electron pressure of about 1.5 N m^{-2} .¹⁴ From this information and knowledge of the appropriate statistical weights and partition functions, the Saha and Boltzmann equations can be used to estimate the relative strengths of the absorption lines due to hydrogen (the Balmer lines) and those due to calcium (the Ca II H and K lines).

Dados da Fotosfera do Sol:

$$T_e = 5777\text{K}$$

$$\text{Pressão de elétrons: } P_e = 1,5 \text{ N m}^{-2}$$

$$\text{Abundância do cálcio por átomo de hidrogênio: } \frac{N_{Ca}}{N_H} = \frac{1}{500000}$$

Exemplo 8.1.5 Estimar a intensidade (força) relativa das linhas de Balmer e as linhas H e K do cálcio na fotosfera solar.

We must compare the number of neutral hydrogen atoms with electrons in the first excited state (which produce the Balmer lines) to the number of singly ionized calcium atoms with electrons in the ground state (which produce the Ca II H and K lines). As in Example 8.1.4, we will use the Saha equation to determine the degree of ionization and will use the Boltzmann equation to reveal the distribution of electrons between the ground and first excited states.

Quantos átomos estão disponíveis (em condições) de formar essas linhas?

H (série de Balmer): átomo neutro; e^- no 1º estado excitado ($n=2$)

CaII (linhas K+K): ionizado; e^- no estado fundamental ($n=0$)

Exemplo 8.1.5 Utilizaremos as equações de

Saha (fração de átomos no estado ionizado)

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT} \quad (\text{Eq. 8.9})$$

lembrando que $P_e = n_e kT$

e

Boltzmann (distribuição de e^- entre os estados fundamental e o 1º estado excitado)

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT} \quad (\text{Eq. 8.6})$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

Let's consider hydrogen first. If we substitute the partition functions found in Example 8.1.4 into the Saha equation (8.9), the ratio of ionized to neutral hydrogen is

$$\left[\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}}} \right]_{\text{H}} = \frac{2kT Z_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT} = 7.70 \times 10^{-5} \simeq \frac{1}{13,000}.$$

Thus there is only one hydrogen ion (H II) for every 13,000 neutral hydrogen atoms (H I) at the Sun's surface. Almost none of the hydrogen is ionized.

Dados e constantes:

$$\chi_i = 13,6 \text{ eV}$$

$$h = 6,62607 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} \text{ (onde 1 Joule = m}^2 \text{ kg s}^{-2}\text{)}$$

$$k = 1,3806 \times 10^{-23} \text{ Joule K}^{-1} = 8,6173463 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

$$m_e = 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Função de partição Z_{I} e Z_{II}

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_1)/kT}. \quad (\text{Eq. 8.7})$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

Usar função de partição do Ex. 8.1.4: íon H (1 próton): $Z_{\text{II}} = 1$

$$Z_{\text{I}} \sim g_n = 2(n)^2 = g_1 = 2(1)^2 = 2$$

Example 8.1.4. Consider the degree of ionization in a stellar atmosphere that is assumed to be composed of pure hydrogen. Assume for simplicity that the electron pressure is a constant $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$.

The Saha equation (8.9) will be used to calculate the fraction of atoms that are ionized, $N_{\text{II}}/N_{\text{total}} = N_{\text{II}}/(N_{\text{I}} + N_{\text{II}})$, as the temperature T varies between 5000 K and 25,000 K. However, the partition functions Z_{I} and Z_{II} must be determined first. A hydrogen ion is just a proton and so has no degeneracy; thus $Z_{\text{II}} = 1$. The energy of the first excited state of hydrogen is $E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$ above the ground state energy. Because $10.2 \text{ eV} \gg kT$ for the temperature regime under consideration, the Boltzmann factor $e^{-(E_2-E_1)/kT} \ll 1$. Nearly all of the H I atoms are therefore in the ground state (recall the previous example), so Eq. (8.7) for the partition function simplifies to $Z_{\text{I}} \simeq g_1 = 2(1)^2 = 2$.

Inserting these values into the Saha equation with $\chi_{\text{I}} = 13.6 \text{ eV}$ gives the ratio of ionized to neutral hydrogen, $N_{\text{II}}/N_{\text{I}}$. This ratio is then used to find the fraction of ionized hydrogen, $N_{\text{II}}/N_{\text{total}}$, by writing

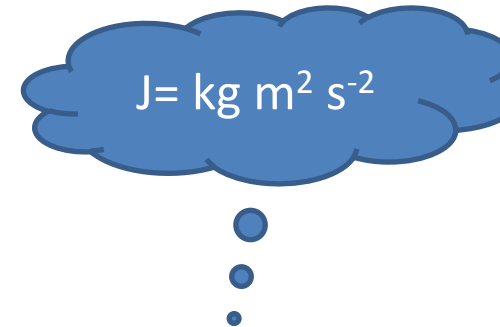
$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{total}}} = \frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{I}} + N_{\text{II}}} = \frac{N_{\text{II}}/N_{\text{I}}}{1 + N_{\text{II}}/N_{\text{I}}};$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

Usar função de partição do Ex. 8.1.4: íon H (1 próton): $Z_{II} = 1$

$$Z_I \sim g_n = 2(n)^2 = g_1 = 2(1)^2 = 2$$

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$



$$\frac{kT}{P_e} = \frac{1,3806 \times 10^{-23} J K^{-1} \times 5777 K}{1,5 N m^{-2}} = \frac{7,96 \times 10^{-20} J}{1,5 (kg m s^{-2}) m^{-2}}$$

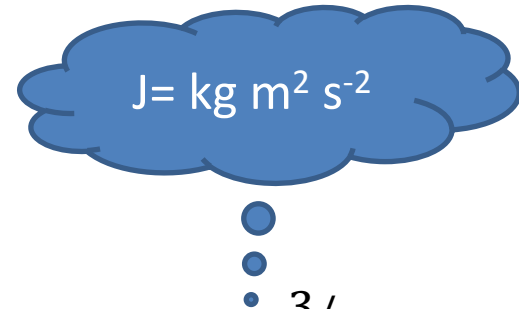
$$\frac{kT}{P_e} = 5,32 \times 10^{-20} m^3$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

$$\frac{kT}{P_e} = 5,32 \times 10^{-20} m^3$$

$$\left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = \left[\frac{2\pi \times 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 7,96 \times 10^{-20} \text{ J}}{(6,62607 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1})^2} \right]^{3/2}$$



$$\left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = \left[\frac{4,556 \times 10^{-49} \text{ kg}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{(4,39 \times 10^{-67} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1})^2} \right]^{3/2} = [1,038 \times 10^{18} m^{-2}]^{3/2}$$

$$\left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = 1,06 \times 10^{27} m^{-3}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

$$\frac{kT}{P_e} = 5,32 \times 10^{-20} m^3$$

$$\left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = 1,06 \times 10^{27} m^{-3}$$

$$e^{-\chi_i/kT} = \exp \left(\frac{-13.6 \text{ eV}}{8,6173 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times 5777 \text{ K}} \right) = \exp(-27,32)$$

$$e^{-\chi_i/kT} = 1,366 \times 10^{-12}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H estão neutros?

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

$$\frac{kT}{P_e} = 5,32 \times 10^{-20} m^3 \quad \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = 1,06 \times 10^{27} m^{-3}$$

$$e^{-\chi_i/kT} = 1,366 \times 10^{-12}$$

$$\frac{N_{II}}{N_I} = 2 \times 5,32 \times 10^{-20} \left(\frac{1}{2} \right) \times 1,06 \times 10^{27} \times 1,366 \times 10^{-12}$$

$$\frac{N_{II}}{N_I} = 7,03 \times 10^{-5} = \frac{1}{13000}$$

Quase todos átomos de H estão neutros.

Exemplo 8.1.5 (cont.) **Dentre os H neutros, quantos estão no 1º estado excitado?**

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Equação de Boltzmann

Diferença de energia entre o 1º estado excitado e o nível fundamental $E_2 - E_1 = 10,2 \text{ eV}$

Como $g_n = 2n^2$, temos $g_1 = 2$ e $g_2 = 8$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{8}{2} \exp\left(\frac{-10.2 \text{ eV}}{8,6173 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times 5777 \text{ K}}\right) = 4 \exp(-20,489)$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 5,054 \times 10^{-9}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de H podem produzir as linhas de Balmer?

$$\frac{N_2}{N_1} = 5,054 \times 10^{-9}$$

The Boltzmann equation (8.6) reveals how many of these neutral hydrogen atoms are in the first excited state. Using $g_n = 2n^2$ for hydrogen (implying $g_1 = 2$ and $g_2 = 8$), we have

$$\left[\frac{N_2}{N_1} \right]_{\text{H I}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT} = 5.06 \times 10^{-9} \simeq \frac{1}{198,000,000}.$$

The result is that only one of every 200 million hydrogen atoms is in the first excited state and capable of producing Balmer absorption lines:

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left(\frac{N_1}{N_{\text{total}}} \right) = 5.06 \times 10^{-9}.$$

Fração
de
átomos
em $n=2$

$$\frac{5,054 \times 10^{-9} N_1}{(1 + 5,054 \times 10^{-9}) N_1}$$

$$\frac{N_I}{N_I + N_{II}} = \frac{13000 N_{II}}{(13000 + 1) N_{II}} \sim 1$$

Fração
de H
neutro

Exemplo 8.1.5 (cont.) Quantos átomos de cálcio podem produzir as linhas Ca H+K?

Átomos 1 vez ionizados (CaII); e^- no estado fundamental

We now turn to the calcium atoms. The ionization energy χ_I of Ca I is 6.11 eV, about half of the 13.6 eV ionization energy of hydrogen. We will soon see, however, that this small difference has a great effect on the ionization state of the atoms. Note that the Saha equation is very sensitive to the ionization energy because χ/kT appears as an *exponent* and $kT \approx 0.5 \text{ eV} \ll \chi$. Thus a difference of several electron volts in the ionization energy produces a change of many powers of e in the Saha equation.

Evaluating the partition functions Z_I and Z_{II} for calcium is a bit more complicated than for hydrogen, and the results have been tabulated elsewhere:¹⁵ $Z_I = 1.32$ and $Z_{II} = 2.30$. Thus the ratio of ionized to un-ionized calcium is

$$\left[\frac{N_{II}}{N_I} \right]_{\text{Ca}} = \underbrace{\frac{2kT Z_{II}}{P_e Z_I}}_1 \underbrace{\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2}}_2 \underbrace{e^{-\chi_I/kT}}_3 = 918.$$

Dado em
Tabela

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_i = 6,11 \text{ eV} \\ Z_I = 1,32 \\ Z_{II} = 2,3 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) = \frac{2 \times 1,3806 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times 5777 \text{ K}}{1,5 \text{ N m}^{-2}} \left(\frac{2,3}{1,32} \right)$$

$$\frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) = 1,85295 \times 10^{-19} \text{ m}^3$$

onde:

$$\frac{J}{\text{N m}^{-2}} = \frac{J}{(\text{kg m s}^{-2}) \text{ m}^{-2}} \frac{\text{m}^{-2}}{\text{m}^{-2}} = \frac{J \text{ m}^{-2}}{(\text{kg s}^{-2}) \text{ m}^{-3}} = \frac{1}{\text{m}^{-3}}$$

$$1 \text{ Joule} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_i = 6,11 \text{ eV} \\ Z_I = 1,32 \\ Z_{II} = 2,3 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} = 1,06 \times 10^{27} m^{-3}$$

(3)

$$e^{-\chi_i/kT} = \exp \left(\frac{-6,11 \text{ eV}}{8,6173 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times 5777 \text{ K}} \right) = \exp(-12,27)$$

$$e^{-\chi_i/kT} = 4,67 \times 10^{-6}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT}{P_e} \left(\frac{Z_{II}}{Z_I} \right) \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_i = 6,11 \text{ eV} \\ Z_I = 1,32 \\ Z_{II} = 2,3 \end{array} \right.$$

Multiplicando (1), (2) e (3), resulta em:

$$\left(\frac{N_{II}}{N_I} \right)_{Ca} = 918,29$$

Somente 1 CaI para cerca de 900 CaII. **Praticamente todo cálcio se encontra na forma de CaII.**

Para saber quantos desses são capazes de produzir as linhas H+K*, vamos verificar a proporção dos átomos de CaII que têm elétrons no estado fundamental.

(*) Os cálculos são similares para CaII K (393,3nm) e H (396,8nm)

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II no estado fundamental

Practically all of the calcium atoms are in the form of Ca II; only one atom out of 900 remains neutral. Now we can use the Boltzmann equation to estimate how many of these calcium ions are in the ground state, capable of forming the Ca II H and K absorption lines. The next calculation will consider the K ($\lambda = 393.3$ nm) line; the results for the H ($\lambda = 396.8$ nm) line are similar. The first excited state of Ca II is $E_2 - E_1 = 3.12$ eV above the ground state. The degeneracies for these states are $g_1 = 2$ and $g_2 = 4$. Thus the ratio of the number of Ca II ions in the first excited state to those in the ground state is

$$\left[\frac{N_2}{N_1} \right]_{\text{Ca II}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT} = 3.79 \times 10^{-3} = \frac{1}{264}.$$

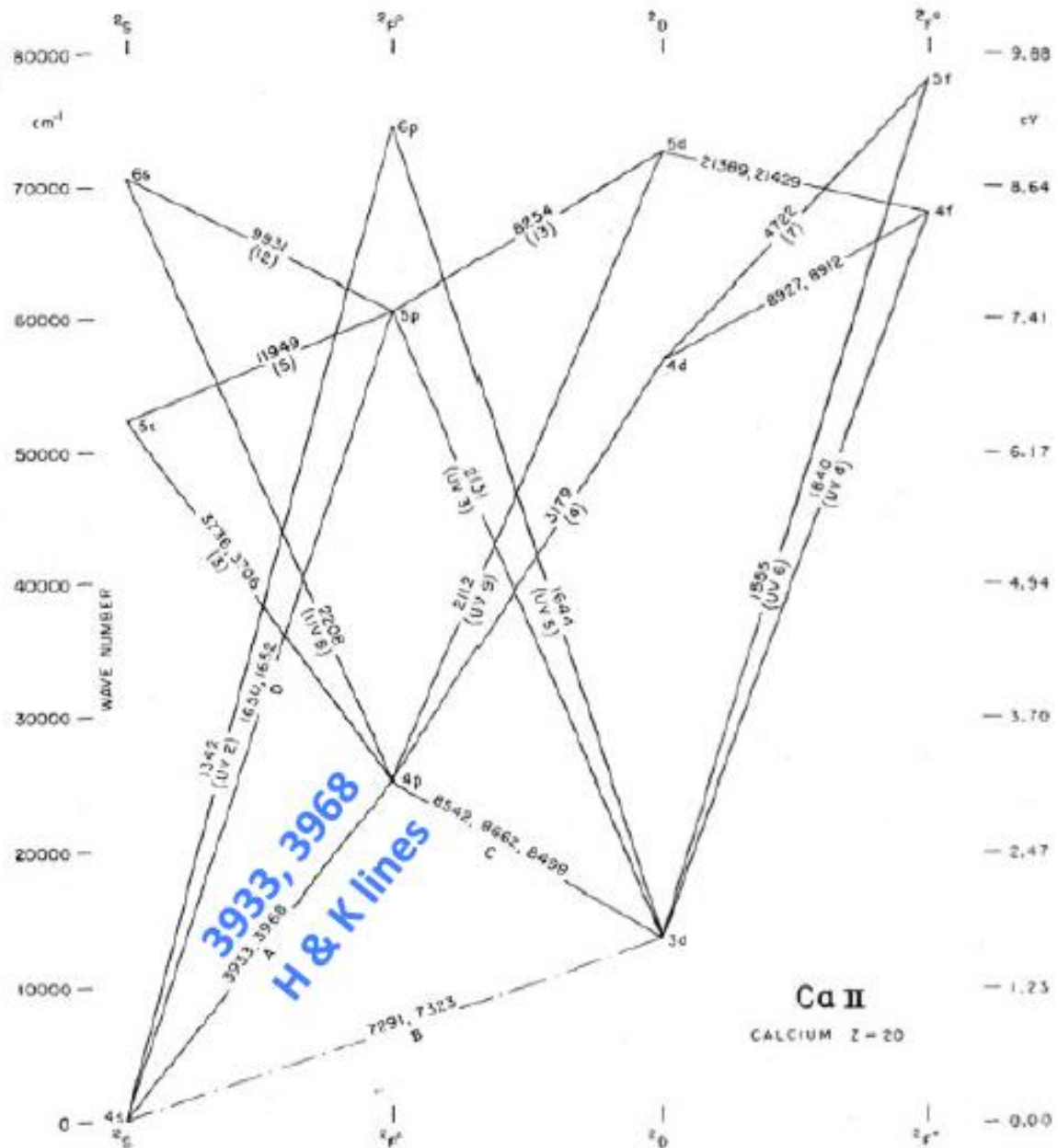
Dados:

$E_2 - E_1 = 3,12$ eV (energia entre o primeiro estado excitado e o fundamental)

$g_1 = 2$ e $g_2 = 4$ (degenerescência)

Diagrama de níveis de energia (term ou Grotrian diagram) para o Ca II

Grotrian diagrams of Astrophysical Interest (Moore+Merrill)
<http://www.nist.gov/data/nsrds/NSRDS-NBS-23.pdf>



Pausa para meditação

População entre dois níveis de energia a e b
(**Boltzmann**):

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}.$$

- N_a, N_b : número de átomos com energia E_a e E_b
- Peso estatístico $g = 2J + 1$.

J : angular momentum number

$$\mathbf{J = L + S}$$

Designação de níveis: $(2S+1)L_J$

Por ex. nível base de nitrogênio: $^4S_{3/2} \rightarrow g = 4$

Exemplo para CaII (linhas H & K)

http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html

Spectrum e.g., **Fe I** or **Na;Mg;**

Lower Wavelength: or Upper Wavenumber (in cm^{-1})

Upper Wavelength: or Lower Wavenumber (in cm^{-1})

Units:

Ritz Wavelength Air (Å)	A_{ki} (s^{-1})	$\log(g_i f_{ik})$	E_i (eV)		E_k (eV)	Lower Level Conf., Term, J	Upper Level Conf., Term, J
3 933.663	1.47e+08	0.135	0.00000	-	3.150984	$3p^6 4s \ ^2S \ 1/2$	$3p^6 4p \ ^2P^\circ \ 3/2$
3 968.469	1.4e+08	-0.18	0.00000	-	3.123349	$3p^6 4s \ ^2S \ 1/2$	$3p^6 4p \ ^2P^\circ \ 1/2$

Lower level: $^2S_{1/2}$, $J=1/2$, $g = 2J + 1 = 2$

Upper level: $^2P_{3/2}$, $J=3/2$, $g = 2J + 1 = 4$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II no estado fundamental

Equação de Boltzmann

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b-E_a)/kT}$$

Dados:

$$E_2 - E_1 = 3,12 \text{ eV}$$

$$g_1 = 2 \text{ e } g_2 = 4$$

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{CaII} = \frac{4}{2} \exp\left(\frac{-3,12 \text{ eV}}{8,6173 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \times 5777 \text{ K}}\right) = 2 \exp(-6,26727)$$

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{CaII} = 3,79 \times 10^{-3} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{CaII} = \frac{1}{263,52}$$

Encontramos cerca de 264 átomos de Ca II com elétrons no estado fundamental, para cada átomo no estado excitado.

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II disponíveis para formar as linhas de H+K

(praticamente todos CaII estão no estado fundamental)

$$\left(\frac{N_{II}}{N_I}\right)_{Ca} = 918,29$$

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{CaII} = 3,79 \times 10^{-3}$$

$$\left[\frac{N_1}{N_{total}}\right]_{CaII} \sim \underbrace{\left[\frac{N_1}{N_1 + N_2}\right]_{CaII}}_{\text{fração no estado fundamental}} \times \underbrace{\left[\frac{N_{II}}{N_I + N_{II}}\right]_{Ca}}_{\text{fração de átomos ionizados}}$$

fração no estado
fundamental

fração de átomos
ionizados

$$\left[\frac{N_1}{N_{total}}\right]_{CaII} \sim \frac{N_1}{N_1} \left[\frac{1}{1 + N_2/N_1}\right]_{CaII} \times \frac{N_I}{N_I} \left[\frac{N_{II}/N_I}{1 + N_{II}/N_I}\right]_{Ca}$$

Exemplo 8.1.5 (cont.) Fração de átomos de Ca II disponíveis para formar as linhas de H+K

(praticamente todos CaII estão no estado fundamental)

$$\left(\frac{N_{II}}{N_I}\right)_{Ca} = 918,29$$

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{CaII} = 3,79 \times 10^{-3}$$

$$\left[\frac{N_1}{N_{total}}\right]_{CaII} \sim \left[\frac{1}{1 + N_2/N_1}\right]_{CaII} \times \left[\frac{N_{II}/N_I}{1 + N_{II}/N_I}\right]_{Ca}$$

$$\left[\frac{N_1}{N_{total}}\right]_{CaII} \sim \left[\frac{1}{1 + 3,79 \times 10^{-3}}\right]_{CaII} \times \left[\frac{918}{1 + 918}\right]_{Ca}$$

$$\left[\frac{N_1}{N_{total}}\right]_{CaII} \sim 0,995136$$

Quase 100% dos átomos de Ca

Exemplo 8.1.5 (cont.) Comparando linhas do H e do Ca

Fração de átomos de H neutros com relação aos de Ca II no primeiro estado excitado

Now it becomes clear why the Ca II H and K lines are so much stronger in the Sun's spectrum than are the Balmer lines. There are 500,000 hydrogen atoms for every calcium atom in the solar photosphere, but only an extremely small fraction, 5.06×10^{-9} , of these hydrogen atoms are un-ionized and in the first excited state, capable of producing a Balmer line. Multiplying these two factors,

$$(500,000) \times (5.06 \times 10^{-9}) \approx 0.00253 = \frac{1}{395},$$

reveals that there are approximately 400 times more Ca II ions with electrons in the ground state (to produce the Ca II H and K lines) than there are neutral hydrogen atoms with electrons in the first excited state (to produce the Balmer lines). The strength of the H and K lines is *not* due to a greater abundance of calcium in the Sun. Rather, the strength of these Ca II lines reflects the sensitive temperature dependence of the atomic states of excitation and ionization.

PRÓXIMA AULA

8.2. Diagrama H-R